MATEMÁTICAS II. *Álgebra Lineal* (*MATRICES Y DETERMINANTES*). *Relación* 10

1) Calcula: $5\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 1\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2\\ -3 & -5 & 0\end{pmatrix}$

2) Calcula: $2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}+7\left[\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 1\\ -2 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}\right]$

3) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\end{pmatrix}$, calcula la matriz X que cumple:

$$X+(A\cdot B)^t=\begin{pmatrix}7 & 3 & -3\\ 2 & -1 & -1\\ -2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

4) Halla X e Y de modo que: $\left.\begin{matrix}X-Y=A\\ 2X+3Y=B\end{matrix}\right\}$, siendo

$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ -2 & 5 & 7\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-2 & 5 & -6\\ 4 & 0 & -9\end{pmatrix}$

5) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 1\\ -2 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 4 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}3 & 1 & -3\\ 7 & 5 & 2\\ -1 & 4 & 1\end{pmatrix}$,

halla: a) $A+3B^t-C^t$ b) $A-2(B-2C)^t$

6) Calcula: $\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

7) Calcula: $\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}$

8) Calcula: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

9) Halla A^n, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10) Encuentra todas las matrices cuadradas de orden 2 que conmutan con la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

11) Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$. Determina:

2A - (2B-5C).

12) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

determina: $A \,.\, B + C^t$ y $B - (A \,.\, A^t)$.

13) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, prueba que las matrices $A + A^t$ y $A - A^t$ son

simétrica y antisimétrica respectivamente.

14) Si A y B son dos matrices cualesquiera ¿Es cierto que $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$?

15) Calcula $X^2 - 2X - 3I$, *si* $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

16) Halla las potencias n - ésimas de las siguientes matrices:

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

17) Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & t & 0\\ t & 2 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Calcula los valores de t para los que el determinante de A es positivo y halla el mayor valor que alcanza dicho determinante.

18) Sin desarrollar, demuestra que es nulo el determinante: $\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 1 & -2\\ 3 & 5 & 2 & -1\\ 0 & -4 & 6 & 6\end{vmatrix}$

19) Sin desarrollar, demuestra que el determinante $\begin{vmatrix}1 & 5 & 0\\ 2 & 2 & 5\\ 2 & 4 & 0\end{vmatrix}$ es múltiplo de 15.

20) Sabiendo que $\begin{vmatrix}a & b & c\\ p & q & r\\ u & v & w\end{vmatrix}=25$, halla razonadamente $\begin{vmatrix}2a & 2c & 2b\\ 2u & 2w & 2v\\ 2p & 2r & 2q\end{vmatrix}$ (Sol: 200)

21) Desarrolla, utilizando propiedades de los determinantes, $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ d+e & e+c & c+d\\ de & ec & cd\end{vmatrix}$

(Sol: $(c-d)(c-e)(d-e)$)

22) Demuestra, sin desarrollar que $\begin{vmatrix}a & b & c\\ a+b & b+c & c+a\\ 2a+b & 2b+c & 2c+a\end{vmatrix}=0$

23) Demuestra, sin desarrollar que $\begin{vmatrix}1 & a & b+c\\ 1 & b & c+a\\ 1 & c & a+b\end{vmatrix}=0$

24) Sean a, b, c y x números reales.

A) Prueba, sin desarrollar el determinante, que $\begin{vmatrix}a & a+x & a+2x\\ b & b+x & b+2x\\ c & c+x & c+2x\end{vmatrix}=0$

B) Halla, sin desarrollarlo, el valor de $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}$

25) Aplicando las propiedades de los determinantes y sabiendo que m y n son números enteros, prueba , sin necesidad de desarrollarlo, que el determinante siguiente es múltiplo de $(m+n)^2$. $\begin{vmatrix} m^2 & 2mn & n^2 \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ 2mn & n^2 & m^2 \end{vmatrix}$

26) ¿Qué valores de a hacen que la matriz $A = \begin{pmatrix} -a & a-1 & a+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-a & a+3 & a+7 \end{pmatrix}$ no tenga inversa.

Razona la respuesta.

27) Halla las inversas de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

28) Demuestra que si A verifica la relación $A^2 + A + I = 0$, entonces existe A^{-1} y hállala.

29) Demuestra que si A es una matriz cuadrada inversible, su transpuesta, también lo es y se verifica que $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

30) Demuestra que si A es una matriz 3 x 3 tal que $A^t = -A$ entonces $|A| = 0$. Si A fuese una matriz de orden n x n se verificaría lo anterior? (Investiga para matrices 2 x2, 4x4, 5x5, ...)

31) Si A es una matriz 5x5 y $|A| = 2$.Calcula:

$$|5A|, \quad |A^{-1}|, \quad |A \cdot A^{-1}|, \quad |A^2|, \quad \left|(A^t)^{-1}\right| \quad y \quad |A \cdot A^t|$$

32) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.Calcula el determinante de las matrices

$2A$, A^{31}, $(A^{31})^{-1}$ y halla la matriz A^{-1}.

33) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix}$, calcula A.A^t y A^{-1}

34) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -4 & 1\\ 1 & 3 & -2\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, determina una matriz X que verifique $(2A+I)B=B+AXA$

35) Resuelve la ecuación matricial $A\,.\,B\,.\,X=C$, siendo $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

36) Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, encuentra dos matrices de orden 2, X e Y, que satisfagan las ecuaciones matriciales siguientes: $\begin{cases}AX+B=C\\ A+YB=C\end{cases}$

37) Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & m & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

a. ¿Para qué valores de m tiene solución la ecuación matricial AX+2B=3C
b. Resuelve la ecuación dada para m = 1.

38) Sean C1, C2 y C3 las columnas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada A de orden 3 cuyo determinante vale 5. Calcula, indicando las propiedades que utilices:

a) El determinante de A^3
b) El determinante de A^{-1}
c) El determinante de 2A.
d) El determinante de una matriz cuadrada cuyas columnas primera, segunda y tercera son, respectivamente, 3C1 – C3, 2C3 y C2.

39) Determina la matriz X que verifica la ecuación AX = X – B, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

40) Determina la matriz X tal que AX − 3B = 0, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & -7\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

41) Resuelve la ecuación matricial $A^2 \cdot X = 2B$, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ 0 & -3 & 1\end{pmatrix}$$

42) Resuelve la ecuación matricial $BA - A^2 = AB - X$, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

43) Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Calcula una matriz X tal que $A^2 + AX = I$, y calcula, si existe, la inversa de X.

44) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -4 & 2\end{pmatrix}$, resuelve la ecuación matricial

$AXA^t = B$

45) Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & -5\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, determina una matriz X que

verifique la igualdad: $BA + XA^{-1} = B$

46) Dadas las

matrices: $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}-9 & 3\\ -8 & 17\end{pmatrix}$,

halla la matriz X que verifica AB+CX=D

47) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, halla dos números reales m y n tales que A+mA+nI=0

48) Halla el rango de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & -1 & 0\\ 2 & 6 & 10 & -2 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}5 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 0\\ 2 & 6 & 0\\ 3 & -6 & 1\\ 4 & -3 & 1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ 9 & 10 & 11 & 12\\ 13 & 14 & 15 & 16\end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix}2 & -2 & -8 & -1 & 1\\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0\\ 12 & 8 & 7 & 4 & 1\\ 8 & 4 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

49) Escribe de manera razonada una matriz:

a)matriz 3 x 3 de rango 2

b) matriz 3 x 3 de rango 1

c) matriz 3 x 4 de rango 2, siendo sus dos primeras filas: $\begin{matrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1 & 1\end{matrix}$

50) Determina el valor de a para que el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ -1 & 1 & 2\\ 4 & a & -1\end{pmatrix}$ sea 2.

(Sol: -13/5).

51) Determina en función del parámetro a el rango de la siguiente matriz:

$\begin{pmatrix}2a+2 & 3 & a\\ 4a-1 & a+1 & 2a-1\\ 5a-4 & a+1 & 3a-4\end{pmatrix}$ (Solución: Si $a=1$ o $a=2$ o $a=3$, rango = 2 en caso contrario, rango = 3)

52) Determina el valor de *a, b* y *c* sabiendo que la matriz $A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 1\\ 1 & a & 2\\ -1 & b & c\end{pmatrix}$, verifica:

$A\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 9\\ 4\end{pmatrix}$ y que *rango(A) = 2*

53) Si $M=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 1 & a & b \\ 2 & c & d \end{pmatrix}$ tiene rango 1. Calcula a, b, c y d.

54) Estudia el rango según el parámetro que aparece en las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & \alpha \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & \alpha \\ \alpha & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}\quad y\quad D=\begin{pmatrix} t+3 & 4 & 0 \\ 0 & t-1 & 1 \\ -4 & -4 & t-1 \end{pmatrix}$$