

13 FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

PARA EMPEZAR

1 Completa la siguiente tabla de magnitudes directamente proporcionales

| | | | | | |
|---|---|---|----|----|----|
| M | 1 | | 5 | | 10 |
| N | | 6 | 15 | 21 | |

| | | | | | |
|---|---|---|----|----|----|
| M | 1 | 2 | 5 | 7 | 10 |
| N | 3 | 6 | 15 | 21 | 30 |

2 Completa la siguiente tabla de magnitudes inversamente proporcionales.

| | | | | | |
|---|----|---|---|----|----|
| M | | 3 | 9 | 18 | 36 |
| N | 18 | 6 | | | |

| | | | | | |
|---|----|---|---|----|-----|
| M | 1 | 3 | 9 | 18 | 36 |
| N | 18 | 6 | 2 | 1 | 0,5 |

3 En una ciudad se celebran todos los años campeonatos de natación. Si el record en la carrera de 1500 metros estilo libre está en 15 minutos y 30 segundos, ¿a qué velocidad media mínima deben nadar este año los participantes para batirlo?

$$15 \text{ minutos y } 30 \text{ segundos} = 930 \text{ segundos} \Rightarrow v = \frac{s}{t} = \frac{1500}{930} = 1,612 \text{ m/s}$$

Deben nadar a más de 1,612 m/s.

La función de proporcionalidad inversa

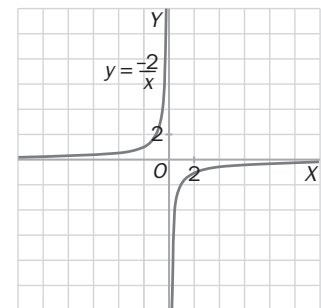
PARA PRACTICAR

Ejercicio resuelto

13.1 Forma una tabla de valores para la función $y = \frac{-2}{x}$ y represéntala.

| | | | | | | | | |
|--------------------|-----|-----|----|------|-----|----|------|------|
| x | -10 | -5 | -1 | -0,1 | 0,1 | 1 | 5 | 10 |
| $y = \frac{-2}{x}$ | 0,2 | 0,4 | 2 | 20 | -20 | -2 | -0,4 | -0,2 |

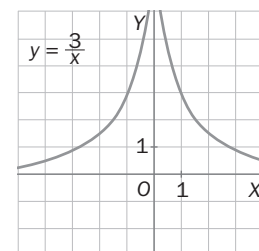
Con los valores obtenidos representamos la gráfica de la función.



13.2 Construye una tabla de valores para la función $y = \frac{3}{x}$ y represéntala.

| | | | | | | | | |
|-------------------|------|------|----|----|-----|---|-----|---|
| x | -0,1 | -2 | -1 | -3 | 0,1 | 1 | 2 | 3 |
| $y = \frac{3}{x}$ | -30 | -1,5 | -3 | -1 | 30 | 3 | 1,5 | 1 |

Con los valores obtenidos representamos la gráfica de la función.

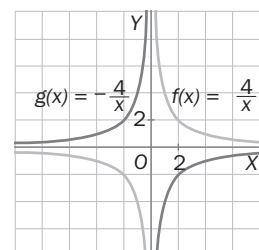


13.3 Representa las gráficas de las funciones $f(x) = \frac{4}{x}$ y $g(x) = \frac{-4}{x}$.

¿Qué diferencias observas?

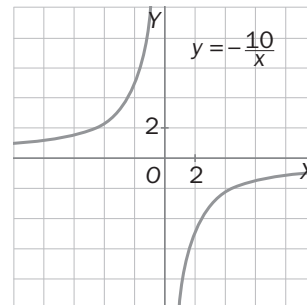
La gráfica función $y = \frac{4}{x}$ es decreciente,

mientras que la función $y = \frac{-4}{x}$ es creciente.



13.4 Dada la función $g(x) = \frac{-10}{x}$:

- Forma una tabla de valores para poder representarla.
- ¿Cuál es su dominio?
- ¿Cuál es su recorrido?
- ¿Es creciente o decreciente?
- ¿Observas alguna simetría?

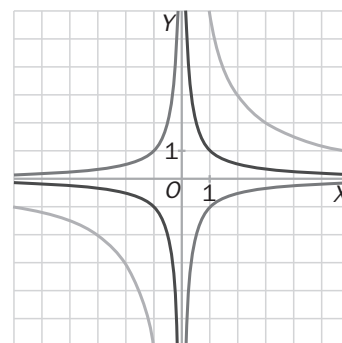


a)

| | | | | | | |
|---------------------|-----|----|----|-----|----|----|
| x | -10 | -5 | -1 | 1 | 5 | 10 |
| $y = \frac{-10}{x}$ | 1 | 2 | 10 | -10 | -2 | -1 |

- $\mathbb{R} - \{0\}$
- $\mathbb{R} - \{0\}$
- Creciente en todo su dominio.
- Es simétrica respecto al origen de coordenadas.

13.5 En la siguiente figura están representadas las funciones: $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{-1}{x}$ y $h(x) = \frac{6}{x}$. ¿Podrías identificarlas observando únicamente su gráfica?



La gráfica de f es la verde, la de g es la azul (creciente) y la de h es la roja (más alejada de los ejes).

13.6 Calcula la expresión de una función de proporcionalidad inversa cuya gráfica pasa por el punto $(-2; -3,5)$.

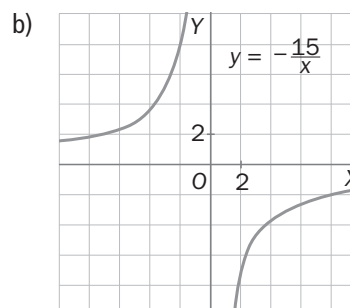
Si la gráfica pasa por el punto $(-2; -3,5)$, se verifica que $-3,5 = \frac{a}{-2} \Rightarrow a = -3,5(-2) = 7$.

Con lo cual, la función será: $y = \frac{7}{x}$

13.7 El producto de dos números es -15 .

- Expresa la función que represente esta situación.
- Representa la gráfica de la función.

a) $x \cdot y = -15 \Rightarrow y = \frac{-15}{x}$



PARA APLICAR

- 13.8 Un colegio paga 3000 euros a una empresa para que pinte las aulas. Ese dinero se lo repartirán a partes iguales entre los pintores que realicen el trabajo.

Completa la siguiente tabla y decide qué función proporciona los valores obtenidos.

| | | | | | |
|--------------------------------|---|---|---|---|---|
| Número de pintores | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Dinero que recibe cada uno (€) | | | | | |

| | | | | | |
|------------------------------------|------|------|------|-----|-----|
| Número de pintores | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Dinero que recibe cada uno (euros) | 3000 | 1500 | 1000 | 750 | 600 |

La función que proporciona estos valores es $y = \frac{3000}{x}$.

- 13.9 Una familia tiene un acuario y pretende alimentar durante 30 días a los 50 peces que viven en él. Para ello compra un pedido de alimentos.

- a) Si cuando llega al acuario se dan cuenta de que son en realidad 75 peces, ¿cuánto tiempo les durará la comida?
 b) ¿Qué función proporciona el tiempo que durará la comida en relación con el número de peces del acuario?

a) Como son magnitudes inversamente proporcionales, la comida durará $\frac{30 \cdot 50}{75} = 20$ días.

b) $y = \frac{1500}{x}$

Asíntotas de la hipérbola

PARA PRACTICAR

- 13.10 Responde a las siguientes cuestiones sobre la función de proporcionalidad inversa $y = \frac{2}{x}$:

- a) Si construyes una tabla de valores dando a x valores muy grandes en valor absoluto, ¿qué observas?
 b) ¿Qué aprecias si construyes una tabla de valores dando a x valores muy pequeños en valor absoluto?
 c) Halla las asíntotas de la función.

a)

| | | | | |
|-------------------|------|-------|--------|-----------|
| x | 100 | 1000 | 10 000 | 1 000 000 |
| $y = \frac{2}{x}$ | 0,02 | 0,002 | 0,0002 | 0,000 002 |

Cuanto más grande es el valor de x , más se aproxima el valor de y a 0.

b)

| | | | | |
|-------------------|-----|------|-------|--------|
| x | 0,1 | 0,01 | 0,001 | 0,0001 |
| $y = \frac{2}{x}$ | 20 | 200 | 2000 | 20 000 |

Cuanto más se aproxima el valor de x a 0, el valor de y se hace cada vez más grande.

- c) Asíntota vertical: $x = 0$ Asíntota horizontal: $y = 0$

13.11 ¿Tienen las mismas asíntotas las funciones $y = \frac{3}{x}$ e $y = \frac{-3}{x}$? Razona la respuesta.

Sí, las dos funciones tienen las asíntotas $x = 0$ e $y = 0$ ya que ambas son funciones de proporcionalidad inversa.

Ejercicio resuelto

13.12 Halla las asíntotas de la función: $y = \frac{2}{x-3}$.

Observa que cuando x tiende a $\pm\infty$, la fracción se aproxima cada vez más a 0, con lo que $y = 0$ es la asíntota horizontal. Por otro lado, cuando x tiende a 3, la fracción tiende a $\pm\infty$. Esto sucede siempre que el denominador de la fracción se aproxima a 0. Por tanto, $x = 3$ es una asíntota vertical.

13.13 Halla las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $y = \frac{5}{x-1}$ b) $y = \frac{1}{x+7}$

a) Asíntota vertical: $x = 1$ Asíntota horizontal: $y = 0$

b) Asíntota vertical: $x = -7$ Asíntota horizontal: $y = 0$

Ejercicio resuelto

13.14 Halla las asíntotas de la función: $y = \frac{3}{x} + 5$.

Observa que cuando x tiende a $\pm\infty$, la fracción se aproxima cada vez más a 0, ya que $\frac{3}{x}$ tiende a 0. La recta $y = 5$ es la asíntota horizontal.

Por otro lado, cuando x tiende a 0, la fracción $\frac{3}{x}$ tiende a $\pm\infty$, con lo que $\frac{3}{x} + 5$ también tiende a $\pm\infty$. Por tanto, la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

13.15 Halla las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $y = \frac{6}{x} + 2$ b) $y = \frac{5}{x} - 3$

a) $x = 0$ e $y = 2$

b) $x = 0$ e $y = -3$

13.16 Halla las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $y = \frac{-5}{x-3} + 2$ b) $y = \frac{1}{x-2} - 3$ c) $y = \frac{1}{x+1} + 7$ d) $y = \frac{-15}{x+2} - 6$

a) $x = 3$ e $y = 2$

b) $x = 2$ e $y = -3$

c) $x = -1$ e $y = 7$

d) $x = -2$ e $y = -6$

13.17 Sean a , b y c tres números reales, con a no nulo. ¿Cuáles son las asíntotas de la función $y = \frac{a}{x+b} + c$?

Asíntota vertical: $x = -b$ y asíntota horizontal: $y = c$

PARA APLICAR

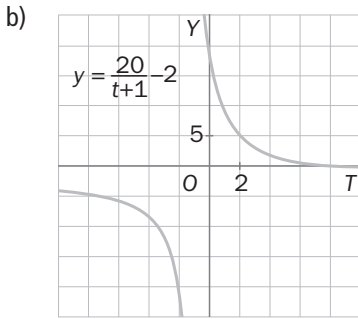
13.18 A Manuel le sobra una barra de pan y la guarda en el congelador. Su temperatura sigue la función:

$$f(t) = \frac{20}{t+1} - 2$$

Donde t son los minutos transcurridos desde que la guardó.

- a) ¿Qué temperatura tenía la barra de pan en el momento en que la puso en el congelador?
- b) Representa la función.
- c) ¿Cuál es la asíntota horizontal de esta función? ¿Qué significado tiene?

a) $f(0) = \frac{20}{0+1} - 2 = 20 - 2 = 18 \Rightarrow$ En el momento de ponerla en el congelador tenía 18 °C.



c) Asíntota horizontal: $y = -2$. Quiere decir que la temperatura de la barra, cuando pasa mucho tiempo, tiende a acercarse a -2 °C.

13.19 En un centro escolar, los alumnos inauguran un aula para emplearla como taller de lectura. Para acondicionarla reciben unas donaciones que siguen la función:

$$y = 100 - \frac{100}{x+1}$$

Donde x es el número de días transcurridos desde la inauguración, e y , el dinero donado ese día.

- a) Atendiendo al planteamiento, ¿cuál debe ser el dominio de la función?
- b) ¿Cuáles son sus asíntotas?
- c) ¿Qué significado tiene la asíntota horizontal?

a) Dominio: $[0, +\infty)$

b) $x = -1$ e $y = 100$

c) Quiere decir que las donaciones tienden a ser 100 €.

Traslación de hipérbolas

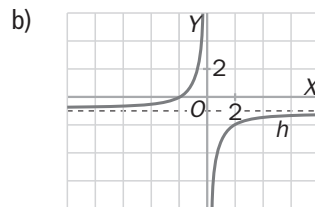
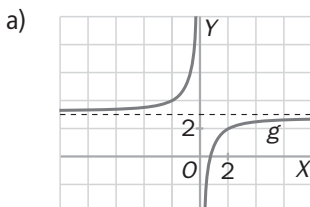
PARA PRACTICAR

Ejercicio resuelto

13.20 A partir de la gráfica de la función $f(x) = \frac{-2}{x}$ representa, mediante traslaciones, las siguientes funciones:

a) $g(x) = \frac{-2}{x} + 3$

b) $h(x) = \frac{-2}{x} - 1$

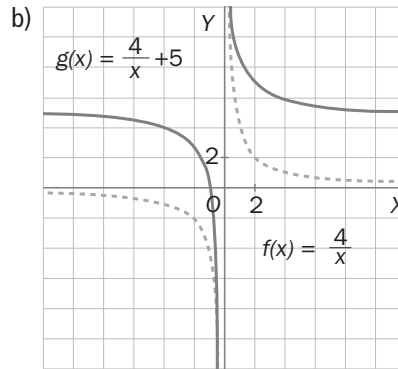
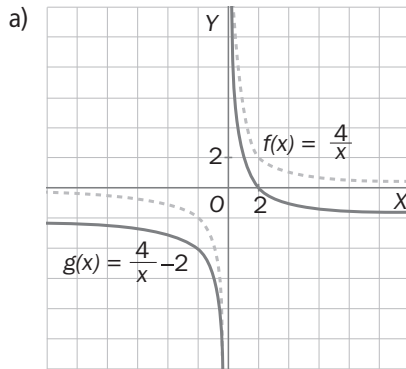


La gráfica de g se obtiene trasladando la gráfica de f tres unidades hacia arriba. La gráfica de h se obtiene trasladando la gráfica de f una unidad hacia abajo.

13.21 Conociendo la gráfica de la función $f(x) = \frac{4}{x}$, representa, mediante traslaciones, las siguientes funciones:

a) $g(x) = \frac{4}{x} - 2$

b) $h(x) = \frac{4}{x} + 5$

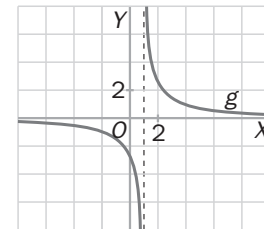


Ejercicio resuelto

13.22 A partir de la gráfica de la función : $f(x) = \frac{3}{x}$, representa, mediante traslaciones, la función

$g(x) = \frac{3}{x-1}$.

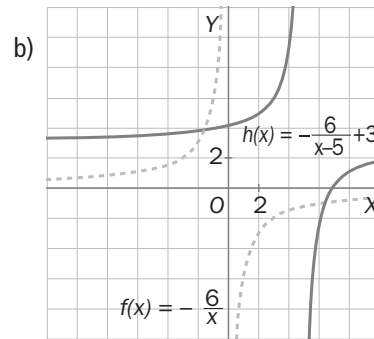
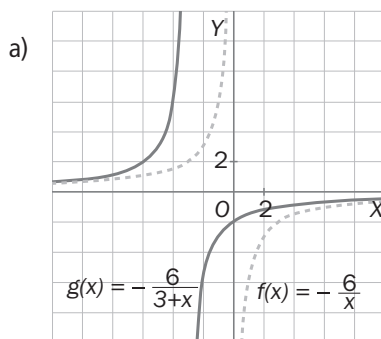
La grafica de g se obtiene trasladando horizontalmente la gráfica de f una unidad hacia la derecha.



13.23 A partir de la gráfica de la función $f(x) = \frac{-6}{x}$ representa, mediante traslaciones, las gráficas de las siguientes funciones:

a) $g(x) = \frac{-6}{x+3}$

b) $h(x) = \frac{-6}{x-5} + 3$



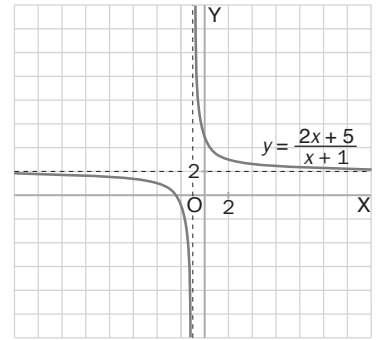
a) La gráfica de g se obtiene trasladando la de f tres unidades hacia la izquierda.

b) La de h se obtiene trasladando la gráfica de f cinco unidades a la derecha y, posteriormente, trasladándola tres unidades hacia arriba.

Ejercicio resuelto

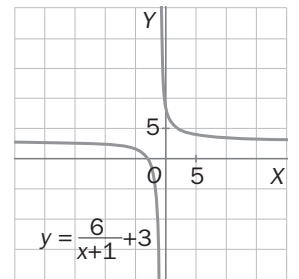
13.24 Representa la función $y = \frac{2x + 5}{x + 1}$.

Dividiendo el numerador entre el denominador se obtiene que $\frac{2x + 5}{x + 1} = 2 + \frac{3}{x + 1}$.
 Por tanto, la gráfica de la función se obtiene a partir de la función $y = \frac{3}{x}$, trasladándola horizontalmente una unidad hacia la izquierda y trasladándola verticalmente dos unidades hacia arriba.



13.25 Representa la función $y = \frac{3x + 7}{x + 1}$.

Dividiendo queda $y = \frac{6}{x + 1} + 3$, con lo que la hipérbola será la que se obtenga trasladando la $y = \frac{6}{x}$ para que tenga asíntotas $\begin{cases} \text{Asíntota vertical: } x = -1 \\ \text{Asíntota horizontal: } y = 3 \end{cases}$.



PARA APLICAR

13.26 Un Ayuntamiento va a colocar farolas en una calle de 150 metros de longitud. Por razones de estética las farolas estarán en línea e igualmente separadas unas de otras. Completa la siguiente tabla, indica a qué función pertenecen dichos valores y represéntala.

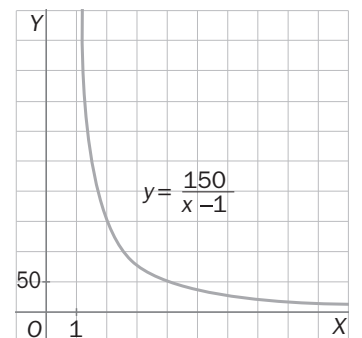
| | | | | | |
|-----------------------------|---|---|---|---|---|
| Número de farolas | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Distancia entre las farolas | | | | | |

| | | | | | |
|-----------------------------|-----|----|----|------|----|
| Número de farolas | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Distancia entre las farolas | 150 | 75 | 50 | 37,5 | 30 |

Sea x , el número de farolas, e y la distancia entre las farolas.

La función que relaciona estas variables es: $y = \frac{150}{x - 1}$.

Su representación es:

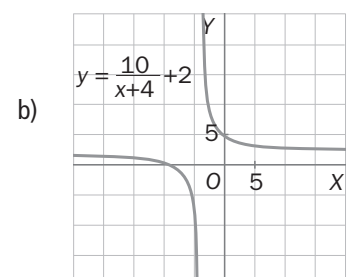


13.27 El número de amonestaciones por día en un instituto viene dado por la función $y = \frac{10}{x + 4} + 2$, donde x es el número de días transcurridos de curso.

- a) ¿Cuántas amonestaciones hubo el primer día, es decir, cuando $x = 1$?
- b) Representa la función mediante traslaciones verticales y horizontales.
- c) ¿Cuál es su asíntota horizontal? ¿Qué representa?

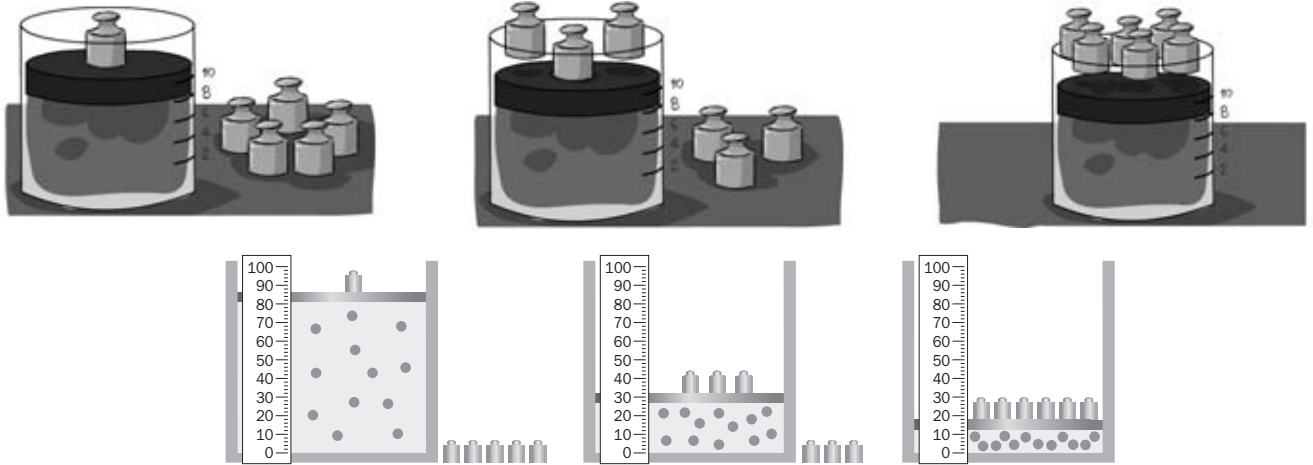
a) Si $x = 1 \Rightarrow y = \frac{10}{1 + 4} + 2 = 2 + 2 = 4$ amonestaciones.

c) Su asíntota horizontal es $y = 2$ e indica que a medida que avanza el curso, las amonestaciones por día tienden a 2.



PARA APLICAR

13.28 En un laboratorio se han realizado los siguientes experimentos. Realiza un dibujo donde se vea cómo quedaría el émbolo si se ponen 3 pesas. ¿Y si se ponen 6 pesas?



Como al poner 3 pesas la presión se triplica el volumen se reduce a un tercio. En el caso de 6 pesas el volumen se reduce a la sexta parte.

Actividades Finales

PARA PRACTICAR Y APLICAR

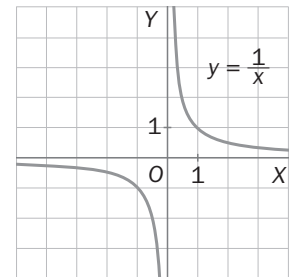
13.29 Razona si las siguientes magnitudes son directa o inversamente proporcionales.

- a) La altura de un edificio y la sombra proyectada.
- b) El número de obreros y los días de duración de la obra.
- c) La velocidad a la que va un móvil y el tiempo que tarda en recorrer 100 kilómetros.
- d) El número de kilogramos de naranjas que se pueden comprar con 20 euros y el precio del kilogramo.
- e) El tiempo que se tarda en limpiar un monte y el número de personas encargadas de la limpieza.

- a) Directa b) Inversa c) Inversa d) Inversa e) Inversa

13.30 Utiliza la tecla x^{-1} o $1/x$ de tu calculadora científica para formar una tabla de valores de la función $y = \frac{1}{x}$ y representa gráficamente la función.

| | | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------|------|----|------|-----|---|-----|------|
| x | -3 | -2 | -1 | -0,1 | 0,1 | 1 | 2 | 3 |
| $y = \frac{1}{x}$ | -0,3̄ | -0,5 | -1 | -10 | 10 | 1 | 0,5 | 0,3̄ |



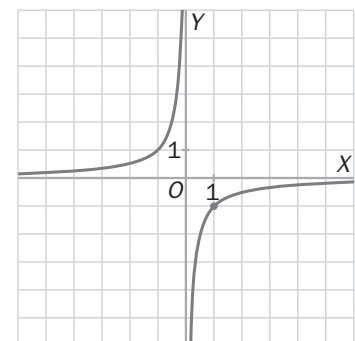
13.31 La hipérbola de la figura pasa por el punto (1, -1).

- a) ¿Cuáles son las características fundamentales que observas a través de su representación gráfica?
- b) ¿Cuál es la expresión de la función?

- a) Su dominio y su recorrido es $\mathbb{R} - \{0\}$.
 - Es continua en todos los puntos de su dominio.
 - Es creciente.
 - Sus asíntotas son $x = 0$ e $y = 0$.

- b) Si pasa por el punto (1, -1) se verifica que:

$$-1 = \frac{a}{1} \Rightarrow a = -1. \text{ Luego } y = \frac{-1}{x}.$$



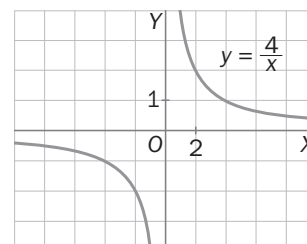
13.32 Para una función $y = \frac{k}{x}$ con $k \neq 0$, razona si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:

- a) Su dominio es toda la recta real.
- b) Es creciente si $k < 0$.
- c) Es continua en $x = 0$.
- d) Su gráfica está compuesta por dos ramas.

- a) Falso, su dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$.
- b) Verdadero.
- c) Falso, $x = 0$ no está en el dominio.
- d) Verdadero.

13.33 El producto de dos números es 4. Construye una tabla de valores, escribe la función y represéntala.

| | | | | | | | | |
|----------|---|---|---|-----|----|----|----|------|
| x | 1 | 2 | 4 | 8 | -1 | -2 | -4 | -8 |
| y | 4 | 2 | 1 | 0,5 | -4 | -2 | -1 | -0,5 |



La función que expresa esta situación es $x \cdot y = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{x}$.

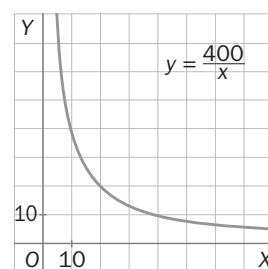
13.34 Un marco en forma de triángulo tiene un área de 200 centímetros cuadrados.

- a) Construye una tabla de valores para los posibles valores de la base y la altura.
- b) Escribe la función y represéntala.

a)

| | | | | |
|-------------------------|----|----|----|----|
| x (base en cm) | 10 | 20 | 25 | 40 |
| y (altura en cm) | 40 | 20 | 16 | 10 |

b) La función que nos proporciona estos valores es $\frac{x \cdot y}{2} = 200 \Rightarrow x \cdot y = 400 \Rightarrow y = \frac{400}{x}$.
(x e y deben ser positivos, ya que son medidas)



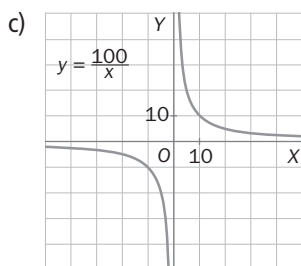
13.35 Varias ONG tienen almacenes en forma de ortoedro en donde guardan alimentos para enviarlos en caso de catástrofes naturales. Todos tienen 5 metros de altura y un volumen de 500 metros cúbicos.

- a) Construye una tabla de valores para los distintos valores de ancho y largo que pueden tener los almacenes.
- b) Escribe la función.
- c) Represéntala.
- d) ¿Cuáles son sus asíntotas?

a)

| | | | | | | | |
|----------------------------|----|----|----|----|----|-----|----|
| x (ancho en metros) | 2 | 5 | 10 | 20 | 25 | 40 | 50 |
| y (largo en metros) | 50 | 20 | 10 | 5 | 4 | 2,5 | 2 |

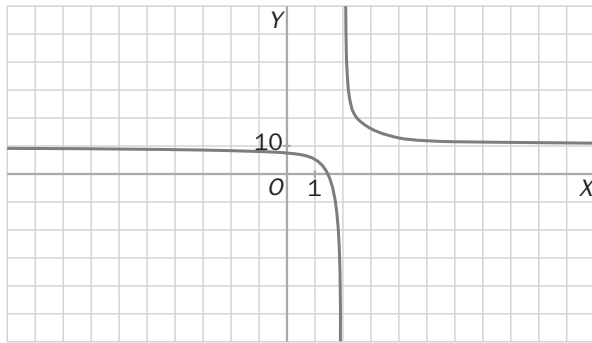
b) $x \cdot y \cdot 5 = 500 \Rightarrow x \cdot y = 100 \Rightarrow y = \frac{100}{x}$. x e y deben ser positivos, ya que son medidas.



En este caso, debido al contexto del problema, solo nos interesa la rama superior de la hipérbola.

d) Sus asíntotas son $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

13.36 La siguiente gráfica se ha obtenido a partir de la de $y = \frac{5}{x}$. ¿De qué función se trata?

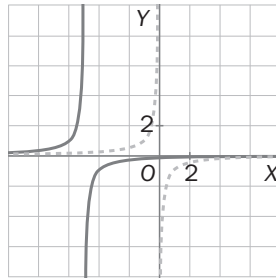
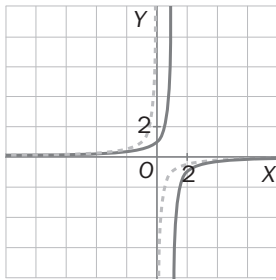


Observamos que sus asíntotas son $x = 2$ e $y = 10$, por lo que su expresión es $y = \frac{1}{x-2} + 10$.

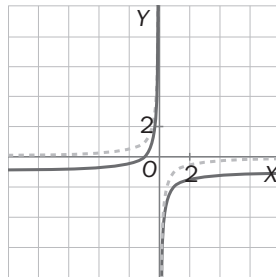
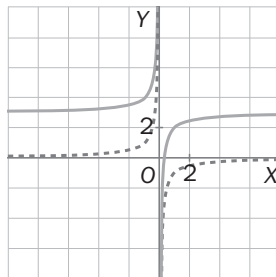
13.37 A partir de la gráfica de la función $y = \frac{-1}{x}$, representa, mediante traslaciones verticales y horizontales las funciones.

a) $y = \frac{-1}{x-1}$ b) $y = \frac{-1}{x+5}$ c) $y = \frac{-1}{x+3} + 1$ d) $y = \frac{-1}{x} + 3$ e) $y = \frac{-1}{x} - 1$ f) $y = \frac{-1}{x-1} - 4$

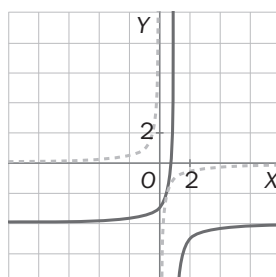
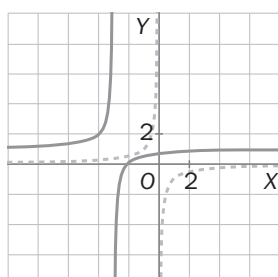
a) y b) se obtienen trasladando horizontalmente la gráfica de $y = \frac{-1}{x}$.



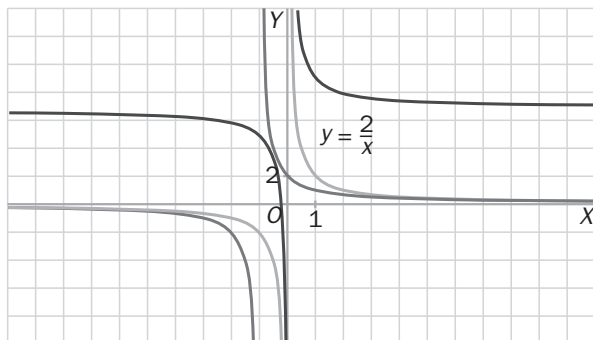
d) y e) se obtienen trasladando verticalmente la gráfica de $y = \frac{-1}{x}$.



c) y f) se obtienen trasladando el centro a los puntos $(-3, 1)$ y $(1, -4)$.



- 13.38 A continuación se muestra, en verde, la gráfica de la función $y = \frac{2}{x}$, y en azul y rojo, las gráficas de las funciones $f(x) = \frac{2}{x} + 7$ y $g(x) = \frac{2}{x+1}$. ¿Puedes identificarlas?



f es la que se traslada verticalmente siete unidades hacia arriba (la de color rojo) y g , la que se traslada horizontalmente una unidad hacia la izquierda (la de color azul).

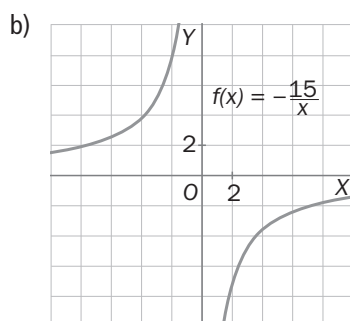
PARA REFORZAR

- 13.39 Dada la función $y = \frac{-15}{x}$:

- Forma una tabla de valores.
- Representala gráficamente.
- ¿Cuál es su dominio?
- ¿Cuál es su recorrido?
- ¿Es creciente o decreciente?
- ¿Es continua para todos los números reales?
- ¿Presenta la función alguna asíntota? En caso afirmativo, ¿cuál o cuáles?

a)

| | | | | | | |
|---------------------|----|-----|----|-----|------|----|
| x | -3 | -2 | -1 | 1 | 2 | 3 |
| $y = \frac{-15}{x}$ | 5 | 7,5 | 15 | -15 | -7,5 | -5 |



- Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$
- Recorrido: $\mathbb{R} - \{0\}$
- Es creciente.
- No es continua en $x = 0$ ya que no está este valor en su dominio.
- Sí, presenta dos asíntotas. La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal, ya que a medida que la variable x tiende a $\pm\infty$, los valores de y tienden a 0. Y la recta $x = 0$ es una asíntota vertical, ya que a medida que los valores de x tienden a 0, los valores de la variable y tienden a $\pm\infty$.

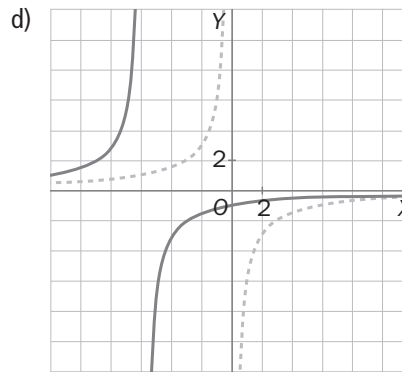
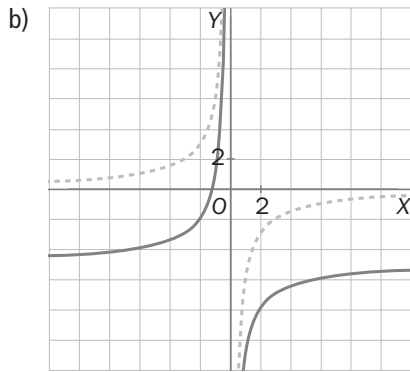
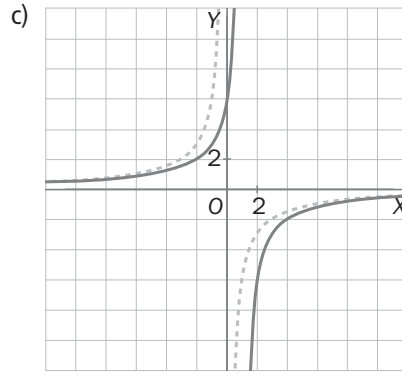
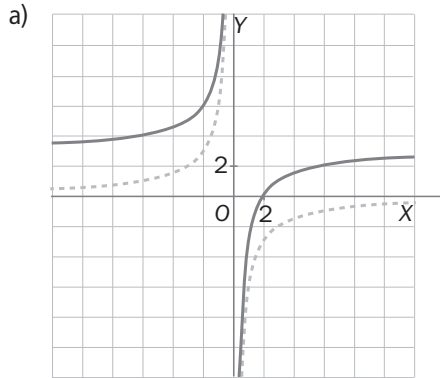
13.40 A partir de la gráfica de la función $y = \frac{-6}{x}$, representa las funciones:

a) $y = \frac{-6}{x} + 3$

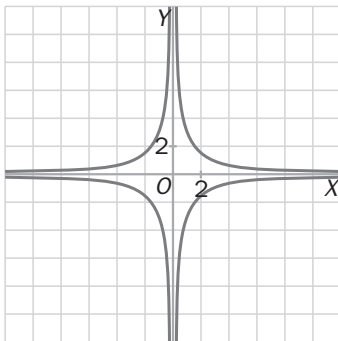
c) $y = \frac{-6}{x-1}$

b) $y = \frac{-6}{x} - 5$

d) $y = \frac{-6}{x+6}$



13.41 A continuación aparecen representadas las siguientes funciones $f(x) = \frac{3}{x}$ y $g(x) = -\frac{3}{x}$. ¿Puedes identificarlas utilizando únicamente la gráfica?



$f(x) = \frac{3}{x}$ es una función decreciente, por lo que es la que está en el primer y tercer cuadrante.

Mientras que $g(x) = -\frac{3}{x}$ es creciente, por lo que es la que está en el segundo y cuarto cuadrante.

13.42 Halla las asíntotas de las siguientes hipérbolas.

a) $y = \frac{5}{x} + 2$

b) $y = \frac{3}{x+1}$

c) $y = \frac{7}{x-4} + 2$

d) $y = \frac{6}{x+1} - 10$

a) $\begin{cases} \text{Asíntota vertical: } x = 0 \\ \text{Asíntota horizontal: } y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \text{Asíntota vertical: } x = -1 \\ \text{Asíntota horizontal: } y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \text{Asíntota vertical: } x = 4 \\ \text{Asíntota horizontal: } y = 2 \end{cases}$

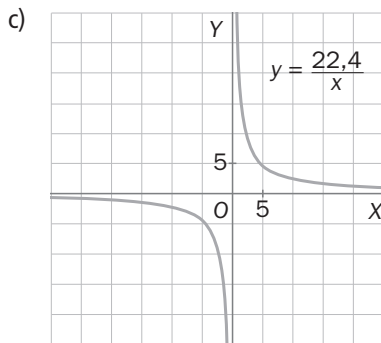
d) $\begin{cases} \text{Asíntota vertical: } x = -1 \\ \text{Asíntota horizontal: } y = -10 \end{cases}$

13.43 A una temperatura de 0°C el volumen que ocupa una cierta cantidad de un gas depende de la presión a la que esté sometido. La presión medida en atmósferas y el volumen medido en litro verifican que $P \cdot V = 22,4$.

- a) ¿A qué presión se encuentra si ocupa un volumen de 5,2 litros?
- b) ¿Qué función proporciona el volumen que ocupa el gas en función de la presión a la que está sometido?
- c) Representa la función.
- d) ¿Cuál es su función inversa?

a) $P = \frac{22,4}{V} = \frac{22,4}{5,2} = 4,48$ atmósferas.

b) $y = \frac{22,4}{x}$, con x la presión en atmósferas.



En este caso, debido al contexto del problema, solo nos interesa la rama superior de la hipérbola; ya que x e y deben ser números positivos.

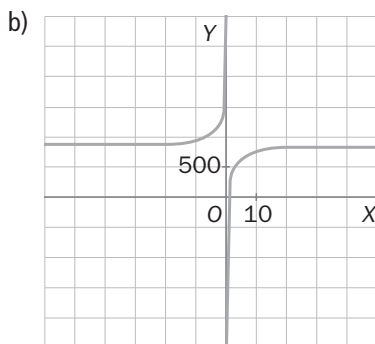
- d) La función inversa es ella misma. Observa que la gráfica es simétrica respecto a la recta $y = x$.

13.44 En una cocina se enciende un horno eléctrico y se observa que su temperatura sigue una función

$$T(t) = 850 - \frac{800}{t}, \text{ donde } t \text{ es el tiempo transcurrido en segundos.}$$

- a) ¿Cuál es la temperatura al cabo de un minuto?
- b) Representa esta función.
- c) ¿Cuál es el centro de esta hipérbola?

a) $T(1) = 850 - \frac{800}{1} = 50^{\circ}\text{C}$.



- c) (0,850)

- 13.45 En el año 2007 se comenzó a hacer un estudio sobre las medusas que llegan cada año a las costas españolas. Se concluyó que este número viene dado por la función

$$N(t) = \frac{582\,000t + 600\,000}{t + 5},$$

donde t son los años transcurridos desde 2007.

- a) ¿Cuántas medusas llegarán en 2008?
 b) Representa esta función mediante traslaciones verticales y horizontales de una hipérbola que sepas representar.
 c) ¿Cuál es su asíntota horizontal? ¿Qué significado tiene?

a) $N(1) = \frac{582\,000 + 600\,000}{1 + 5} = 197\,000$ medusas.

- b) Dividimos el numerador entre el denominador:

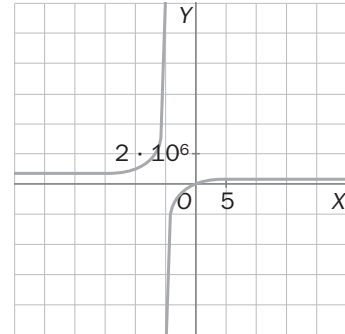
$$\frac{582\,000 \cdot t + 600\,000}{t + 5} = 582\,000 + \frac{-2\,310\,000}{t + 5}$$

Por tanto para representar la función basta tomar la gráfica de la función

$y = \frac{-2\,310\,000}{x}$, y trasladarla 582 000 unidades hacia arriba

y cinco unidades hacia la izquierda.

- c) Su asíntota horizontal es $y = 582\,000$. Esto significa que a medida que pasen los años el número de medusas que llegarán a las costas va a tender a 582 000



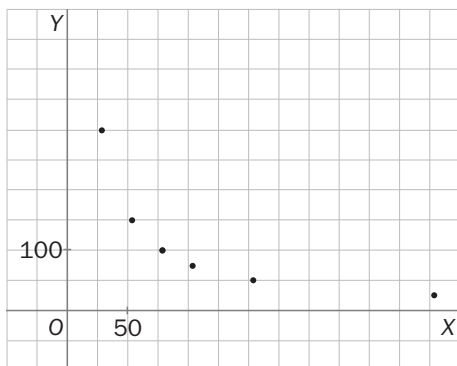
- 13.46 La frecuencia medida en hercios (Hz) de la nota producida por una guitarra es inversamente proporcional a la longitud de la cuerda.

- a) Si una nota tiene 100 Hz de frecuencia con una cuerda de 75 cm de largo, ¿qué longitud de cuerda tendremos que utilizar para que la nota produzca una frecuencia de 150 Hz?
 b) Haz una tabla de valores y represéntalos gráficamente.
 c) ¿Cuál es la función correspondiente?
 d) ¿Cuáles son sus asíntotas?

- a) Como son magnitudes inversamente proporcionales, la longitud de la cuerda será $\frac{100 \cdot 75}{150} = 50$ cm

b)

| | | | | | | | | | |
|------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|-----|-----|
| Frecuencia (Hz) | 25 | 30 | 50 | 75 | 100 | 150 | 200 | 250 | 300 |
| Longitud (cm) | 300 | 250 | 150 | 100 | 75 | 50 | 37,5 | 30 | 25 |



c) $y = \frac{7500}{x}$

d) $x = 0$ e $y = 0$

13.47 Repartiendo propaganda

Una empresa, que se dedica a elaborar y gestionar campañas de propaganda sobre marcas comerciales, ha realizado un estudio sobre la relación existente entre el número de personas que trabajan como repartidoras de una remesa de 10 000 folletos informativos de una marca de ordenadores y los días que precisan para finalizar el trabajo. Los resultados se reflejan en la siguiente tabla.

| Número de días (x) | Número de personas (y) |
|--------------------|------------------------|
| 2 | 90 |
| 5 | 36 |
| 10 | 19 |
| 18 | 10 |
| 20 | 9 |

- La empresa está interesada en utilizar el anterior estudio para organizar próximos repartos de paqueditas características. ¿Existe algún tipo de relación entre las dos magnitudes consideradas?
- Escribe la función que consideres más adecuada para ajustar los anteriores valores.
- ¿Cuál de los anteriores valores se aleja más de la función ajustada?
- Estima el número de días necesarios para repartir 10 000 folletos si se han contratado 15 trabajadores.

- A la vista de los datos, el número de días y el de repartidores son magnitudes inversamente proporcionales.
- En casi todos los casos, el producto de los valores de las dos magnitudes es 180. Por tanto, si x es el número de días e y el de trabajadores se puede considerar que $y = \frac{180}{x}$.
- El único caso que se aleja, y no en gran medida, del valor de la función es cuando han trabajado 19 personas y han tardado 10 días.
- $x = \frac{180}{15} = 12$ días.

13.48 Financiación de un ordenador

Margarita quiere comprarse un ordenador portátil con características especiales. En la oficina de información de la empresa vendedora le ofrecen las siguientes condiciones.

Valor total: 1750 euros.

- Pago el día de reserva de la compra: 150 euros.
- Pago el día de entrega del ordenador: 600 euros.
- Resto a pagar en un número de mensualidades a convenir, pero con un aumento del total del capital que falta de acuerdo con la siguiente tabla.

| N.º de mensualidades | Aumento del capital pendiente |
|----------------------|-------------------------------|
| Menos de 6 | 15% |
| Entre 6 y 10 | 30% |
| Entre 11 y 20 | 50% |

- Escribe la función que determine el dinero que se ha de pagar cada mes según el número de meses. ¿Qué tipo de función es?
- Calcula las mensualidades para los casos de 5, 10 y 15 meses.
- Si Margarita quiere pagar, aproximadamente, un total de 2050 euros, ¿cuál es el número máximo de mensualidades que puede contratar?

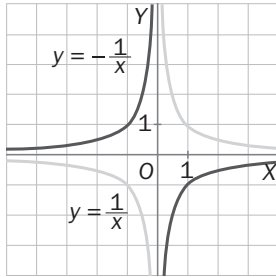
$$a) \quad A = \begin{cases} \frac{1150}{x} & \text{si } 0 < x < 6 \\ \frac{1300}{x} & \text{si } 6 \leq x \leq 10 \\ \frac{1500}{x} & \text{si } 10 < x \leq 20 \end{cases}$$

Se trata de una función definida a trozos en la que cada uno de ellos es una función de proporcionalidad inversa.

- Si son 5 mensualidades, en cada una de ellas deberá pagar 230 euros.
Si son 10 mensualidades, en cada una de ellas deberá pagar 130 euros.
Si son 15 mensualidades, en cada una de ellas deberá pagar 100 euros.
- Como mucho, podrá contratar 10 mensualidades ya que si contrata entre 6 y 10, deberá pagar un total de $150 + 600 + 1000 \cdot 1,3 = 2050$ €.

AUTOEVALUACIÓN

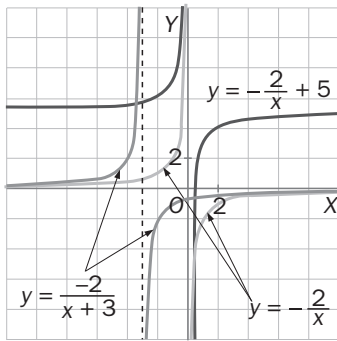
13.A1 Representa las funciones $y = \frac{1}{x}$ e $y = -\frac{1}{x}$. ¿Qué similitudes y qué diferencias observas entre sus gráficas?



- Similitudes:
- Tienen el mismo dominio y recorrido.
 - Son continuas en sus dominios.
 - Tienen las mismas asíntotas.

Diferencias: $y = \frac{1}{x}$ es decreciente, mientras que $y = -\frac{1}{x}$ es creciente

13.A2 Utiliza la gráfica de la función $y = \frac{-2}{x}$ para representar las hipérbolas $y = \frac{-2}{x} + 5$ e $y = \frac{-2}{x+3}$

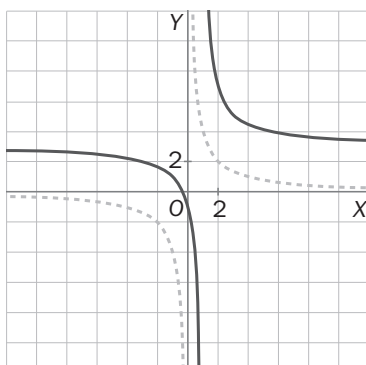


Para representar $y = \frac{-2}{x} + 5$ desplazamos verticalmente la función $y = \frac{-2}{x}$ cinco unidades hacia arriba.

Para representar $y = \frac{-2}{x+3}$ la desplazamos horizontalmente tres unidades hacia la izquierda.

13.A3 Utiliza la gráfica de la hipérbola $y = \frac{4}{x}$ para representar la hipérbola $y = \frac{4}{x-1} + 3$.

La hipérbola $y = \frac{4}{x-1} + 3$ tiene centro $(1, 3)$. Por tanto, hay que trasladar la hipérbola $y = \frac{4}{x}$ de modo que su centro sea $(1, 3)$.



13.A4 Jorge y Eduardo se van de excursión de fin de semana. Tienen que hacer 100 kilómetros en coche.

a) ¿Cuánto tardarán si van a 100 kilómetros por hora? ¿Y si van a 80 kilómetros por hora?

b) Expresa la función que relaciona la velocidad a la que realizan el viaje con su duración.

a) Si van a 100 km/h tardan 1 hora y si van a 80 km/h tardan $\frac{100}{80} = 1,25 \text{ h} = 1 \text{ h } 15 \text{ min}$.

b) $t = \frac{100}{v}$, donde v es la velocidad en km/h y t es el tiempo en horas.

13.A5 ¿Cuáles son las asíntotas de esta hipérbola?

$$y = \frac{-7}{x+1} + 4$$

Asíntota vertical: $x = -1$

Asíntota horizontal: $y = 4$

13.A6 Escribe la expresión algebraica de la hipérbola que tiene sus asíntotas paralelas a los ejes de coordenadas y cuyo centro es el punto (2, 7).

$$y = \frac{a}{x-2} + 7, \text{ con } a \neq 0$$

13.A7 En el cumpleaños de Sara algunos de sus compañeros de clase le compran un regalo que costó 50 €. Ese dinero lo pagarán a partes iguales entre los que participen.

a) Si participan 10 compañeros, ¿Cuánto pondrá cada uno? ¿Y si participan 15?

b) Expresa la función que relaciona el número de compañeros que participan y el dinero que tiene que poner cada uno.

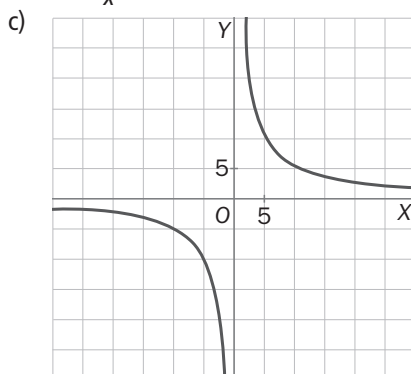
c) Representa la gráfica de la función.

d) ¿Cuáles son sus asíntotas?

e) ¿Qué significado tiene la asíntota horizontal?

a) Si participan 10 compañeros, cada uno paga 5 €. Si participan 15, cada uno paga $3,3 \text{ €}$.

b) $y = \frac{50}{x}$



En este caso, debido al contexto del problema, solo nos interesa la rama superior de la hipérbola; ya que x e y deben ser números positivos.

d) Asíntota vertical: $x = 0$

Asíntota horizontal: $y = 0$

e) La asíntota horizontal $y = 0$ quiere decir que al aumentar el número de compañeros que participan, la cantidad que pondrá cada uno se aproximará cada vez más a 0.

Los palíndromos

Un palíndromo es una palabra, número o frase que se lee igual hacia adelante que hacia atrás.

Cuando es un número, se llama capicúa.

23 432 731 090 137

Es fácil escribir un número capicúa de muchas cifras, pero hace falta mucha imaginación para escribir una palabra o frase palindrómica con significado.

RECONOCER YO DE TODO TE DOY

Completa estas y juega a inventar otras.

OJO R...

ELLA TE DAR...

ADAN NO CAL...

YO HAGO Y...

ALLÍ VES...

SE ES O N...

OJO ROJO

ELLA TE DARÁ DETALLE

ADAN NO CALLA CON NADA

YO HAGO YOGA HOY

ALLÍ VES SEVILLA

SE ES O NO SE ES